

MAT 1739 - Cours 2

Taux de variation moyen et instantané (Suite) + Début cours

3

Automne 2019

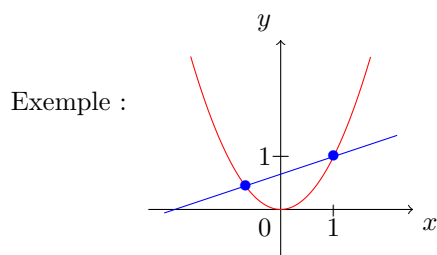
Table des matières

1 Définitions	1
1.1 Sécantes et tangentes	1
2 Taux de variation moyen (TVM)	2
2.1 Première approche	2
2.2 Définition	3
3 Taux de variation instantané (TVI) - Début cours 3	3
3.1 Première approche	3
3.2 Définition	4
3.3 Calcul du taux de variation instantané	4
3.4 Exemples : taux de variation instantanés de $f : x \mapsto x^2$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$	5
4 Bilan	5

1 Définitions

1.1 Sécantes et tangentes

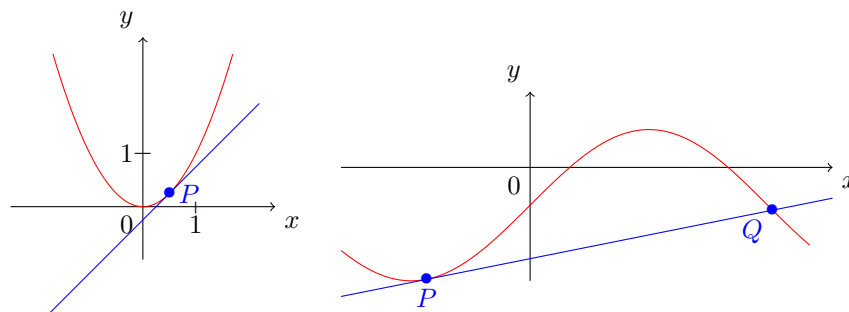
Définition 1. Une *sécante* est une droite qui relie deux points d'une même courbe.



La définition suivante est informelle, nous ne disposons pas encore des outils appropriés pour avoir une définition plus rigoureuse (il faut la notion de *limite*).

Définition 2. La *tangente* à une courbe en l'un de ses points est une droite qui « touche » la courbe au plus près « au voisinage » de ce point, appelé *point de tangence*. La courbe et sa tangente forment alors un « angle nul » au point de tangence.

Exemples :



Notez que sur le dessin de droite, la tangente au point P est aussi une sécante à la courbe, c'est un cas de figure possible.

2 Taux de variation moyen (TVM)

2.1 Première approche

Alice descend le canal Rideau sur patins à glace pendant que son ami Bob relève la distance qu'elle parcourt au fil du temps. Les distances relevées par Bob sont écrites dans le tableau suivant.

Temps t (s)	Distance parcourue d (m)
0	0
1	4
2	9
3	16
4	25
5	34

On cherche à savoir quelle est la vitesse moyenne d'Alice sur un intervalle de temps donné, ce qui peut être vu comme le taux de variation moyen de la distance parcourue. Quel est le taux de "variation moyen" de la distance d'Alice sur les intervalles de temps suivants :

(a) 0 à 1 secondes ?

Réponse : taux de variation moyen = $\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{4-0}{1-0} = 4$ m/s.

(b) 1 à 3 secondes ?

Réponse : $\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{16-4}{3-1} = \frac{12}{2} = 6$ m/s.

(c) 0 à 5 secondes ?

Réponse : $\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{34-0}{5-0} = \frac{34}{5} = 6.8$ m/s.

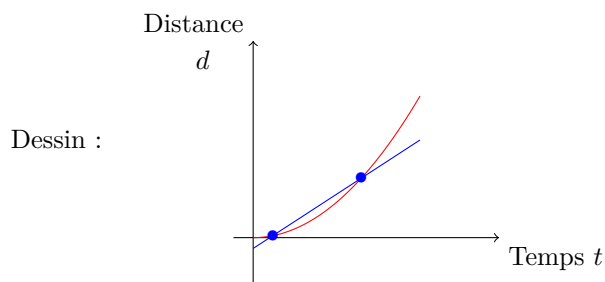
(d) 3 à 4 secondes ?

Réponse : $\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{25-16}{4-3} = \frac{9}{1} = 9$ m/s.

(e) 4 à 5 secondes ?

Réponse : $\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{34-25}{5-4} = \frac{9}{1} = 9$ m/s.

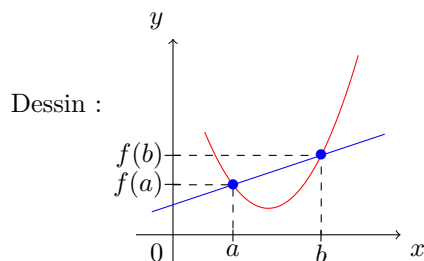
Remarque. La formule $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ est similaire à celle utilisée pour le calcul de la pente d'une droite. Graphiquement, le taux de variation moyen peut être vu comme la pente d'une certaine sécante à la courbe.



2.2 Définition

Définition 3. Soit f une fonction et $a < b$ deux réels tels que f soit définie sur $[a, b]$. Le *taux de variation moyen* de f sur l'intervalle $[a, b]$ correspond à la pente de la sécante à la courbe qui relie les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Il est donné par la formule :

$$\text{taux de variation moyen de } f \text{ sur } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

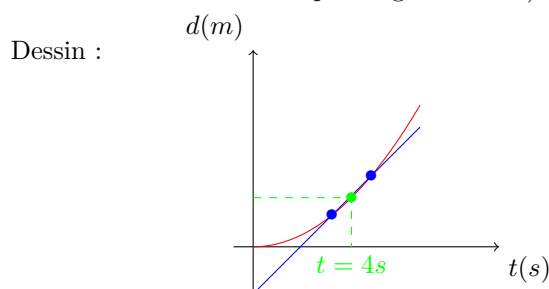


3 Taux de variation instantané (TVI) - Début cours 3

3.1 Première approche

On a vu dans la partie précédente le taux de variation moyen. Maintenant, on aimerait avoir le taux de variation instantané en un point x , c'est-à-dire le taux de variation non plus sur un intervalle, mais précisément au point x . En reprenant l'exemple de la partie précédente, on cherche à calculer la vitesse d'Alice à un instant t donné à partir du relevé de sa distance par Bob (voir Partie 2.1).

Intuitivement, cela correspond approximativement au taux de variation moyen sur un tout petit intervalle contenant t . Si on cherche à calculer la vitesse d'Alice au temps $t = 4s$, on peut par exemple chercher à calculer la vitesse moyenne d'Alice entre 3.5 et 4.5 secondes (il faut demander à Bob de relever les distances plus régulièrement).

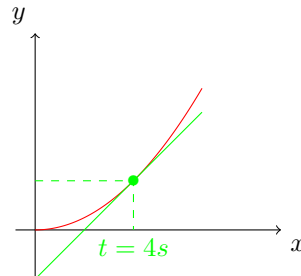


Quand on prend un intervalle de plus en plus petit, la sécante va se "rapprocher" de plus en plus de la tangente au point de la courbe dont l'abscisse est 4 secondes.

3.2 Définition

Définition 4. Soit f une fonction et $x \in \mathbb{R}$ un point du domaine de définition de f . Le *taux de variation instantané* de f au point x est la pente de la tangente au point $(x, f(x))$ (si elle existe, ce qui n'est pas toujours le cas si la fonction f n'est pas assez « régulière »).

Dessin :



3.3 Calcul du taux de variation instantané

Calcul approché (première méthode)

On procède de manière graphique : on trace approximativement la tangente à la courbe au point qui nous intéresse puis on calcule la pente de cette courbe.

Calcul approché (deuxième méthode)

On choisit un (petit) intervalle $[a, b]$ contenant le point x pour auquel on veut calculer le taux de variation instantané puis on calcule le taux de variation moyen sur $[a, b]$ (voir Définition 3).

Ces deux premières méthodes donnent des résultats approximatifs. La troisième méthode présentée ci-dessous offre plus de précision quand on dispose de l'équation de la fonction (et permet un calcul exact dans la plupart des cas).

Calcul du taux de variation instantané

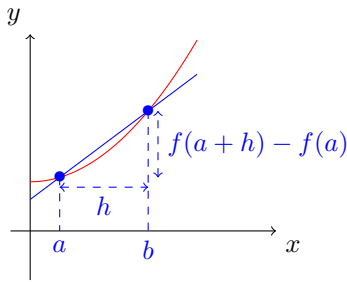
Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant $[a, b]$ ($a \neq b$). Le taux de variation moyen de f sur $[a, b]$ est la pente de la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et vaut (voir Définition 3) :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Soit $h = b - a$ la distance entre a et b , de sorte que $b = a + h$. En remplaçant b par cette expression dans la formule précédente, on en déduit que le taux de variation moyen sur $[a, a + h]$ vaut

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (h \neq 0).$$

Dans cette estimation, plus h est petit, plus l'estimation du taux de variation instantané est précis. En faisant “tendre” h vers 0 (on verra plus tard la notion de limite), dans la plupart des cas on peut en déduire la valeur exacte du taux de variation instantané au point a .



3.4 Exemples : taux de variation instantanés de $f : x \mapsto x^2$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Fonction carrée

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction carrée $x \mapsto x^2$. Donnez une estimation (en fonction de h) du taux de variation instantané (TVI) de f au point 2.

D'après ce qui précède, on a pour $a \in \mathbb{R}$ fixé et $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{TVI (en } a) &\approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{(a^2 + 2ah + h^2) - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= 2a + h. \end{aligned}$$

Pour $a = 2$ on obtient $\text{TVI} \approx 4 + h$. Donc plus h s'approche de 0, plus le taux de variation instantané s'approche de 4.

Fonction racine carrée

On note $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$. Calculez

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

pour $a \in [0, +\infty[$ et $h \neq a$ tel que $a+h \in [0, +\infty[$.

Correction :

$$\begin{aligned} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{(\sqrt{a+h})^2 + \sqrt{a+h}\sqrt{a} - \sqrt{a}\sqrt{a+h} - (\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}. \end{aligned}$$

4 Bilan

- Un taux de variation moyen (TVM) est un taux de variation d'une fonction sur un intervalle, tandis qu'un taux de variation instantané (TVI) est un taux de variation d'une fonction en un point précis.

- Pour calculer le taux de variation moyen d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$, il suffit de calculer la quantité $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ qui correspond à la pente d'une certaine sécante.
- Le taux de variation instantané en un point est la pente de la tangente au point de la courbe correspondant.
- Le calcul du taux de variation instantané est plus compliqué. On dispose de méthode de calcul approché en calculant des taux de variation moyen sur des petits intervalles.
- L'estimation du taux de variation instantanée d'une fonction f en un point a est directement lié au calcul de la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.